

O odwzorowaniach w przybliżeniu zachowujących ortogonalność

Jacek Chmieliński

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Instytut Matematyki UJ, 13 stycznia 2010



Przestrzenie unitarne

Niech X i Y będą przestrzeniami unitarnymi (rzeczywistymi lub zespolonymi). Mówimy, że odwzorowanie $T: X \rightarrow Y$ *zachowuje ortogonalność* jeśli

$$\forall x, y \in X \quad x \perp y \Rightarrow T(x) \perp T(y). \quad (1)$$



Przestrzenie unitarne

Niech X i Y będą przestrzeniami unitarnymi (rzeczywistymi lub zespolonymi). Mówimy, że odwzorowanie $T: X \rightarrow Y$ *zachowuje ortogonalność* jeśli

$$\forall x, y \in X \quad x \perp y \Rightarrow T(x) \perp T(y). \quad (1)$$

W dalszych rozważaniach ograniczamy się do odwzorowań liniowych.



Twierdzenie

Dla niezerowego odwzorowania liniowego $T: X \rightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

- (i) *T zachowuje ortogonalność;*
- (ii) $\exists \gamma > 0 \forall x \in X : \|T(x)\| = \gamma \|x\|;$
- (iii) $\exists \beta > 0 \forall x, y \in X : \langle T(x) | T(y) \rangle = \beta \langle x | y \rangle.$

Przestrzenie unormowane

Niech X będzie przestrzenią unormowaną (nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych).



Przestrzenie unormowane

Niech X będzie przestrzenią unormowaną (nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych).

- Ortogonalność Jamesa (isosceles orthogonality)

$$x \perp_i y \iff \|x + y\| = \|x - y\|.$$



Przestrzenie unormowane

Niech X będzie przestrzenią unormowaną (nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych).

- Ortogonalność Jamesa (isosceles orthogonality)

$$x \perp_i y \iff \|x + y\| = \|x - y\|.$$

- Ortogonalność Birkhoffa (Birkhoffa-Jamesa):

$$x \perp_B y \iff \forall \alpha \in \mathbb{K} : \|x + \alpha y\| \geq \|x\|.$$



Semi-iloczyn skalarny

- G. Lumer, *Semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29-43.
- J.R. Giles, *Classes of semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967), 436-446.
- S.S. Dragomir, *Semi-Inner Products and Applications*, Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, NY, 2004.



Semi-iloczyn skalarny

- G. Lumer, *Semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29-43.
- J.R. Giles, *Classes of semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967), 436-446.
- S.S. Dragomir, *Semi-Inner Products and Applications*, Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, NY, 2004.

Dla dowolnej przestrzeni unormowanej X można określić funkcjonał $[\cdot|\cdot] : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ spełniający następujące własności:

- (s1) $[\lambda x + \mu y|z] = \lambda [x|z] + \mu [y|z]$, $x, y, z \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
- (s2) $[x|\lambda y] = \overline{\lambda} [x|y]$, $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$;
- (s3) $|[x|y]| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, $x, y \in X$;
- (s4) $[x|x] = \|x\|^2$, $x \in X$.



Semi-iloczyn skalarny

- G. Lumer, *Semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29-43.
- J.R. Giles, *Classes of semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967), 436-446.
- S.S. Dragomir, *Semi-Inner Products and Applications*, Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, NY, 2004.

Dla dowolnej przestrzeni unormowanej X można określić funkcjonał $[\cdot|\cdot] : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ spełniający następujące własności:

$$(s1) \quad [\lambda x + \mu y|z] = \lambda [x|z] + \mu [y|z], \quad x, y, z \in X, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K};$$

$$(s2) \quad [x|\lambda y] = \overline{\lambda} [x|y], \quad x, y \in X, \quad \lambda \in \mathbb{K};$$

$$(s3) \quad |[x|y]| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad x, y \in X;$$

$$(s4) \quad [x|x] = \|x\|^2, \quad x \in X.$$

Odwzorowanie $[\cdot|\cdot]$ nazywamy *semi-iloczynem skalarnym* w (unormowanej) przestrzeni X .



Dla danej normy może istnieć wiele różnych semi-iloczynów skalarnych. Jedyność jest równoważna z gładkością przestrzeni.



Dla danej normy może istnieć wiele różnych semi-iloczynów skalarnych. Jedyność jest równoważna z gładkością przestrzeni. Jeśli X jest przestrzenią unitarną, to jedynym semi-iloczynem skalarnym jest oczywiście sam iloczyn skalarny.



Dla danej normy może istnieć wiele różnych semi-iloczynów skalarnych. Jedyność jest równoważna z gładkością przestrzeni. Jeśli X jest przestrzenią unitarną, to jedynym semi-iloczynem skalarnym jest oczywiście sam iloczyn skalarny.

- semi-ortogonalność

$$x \perp_s y \quad :\Leftrightarrow \quad [y|x] = 0.$$

Dla danej normy może istnieć wiele różnych semi-iloczynów skalarnych. Jedyność jest równoważna z gładkością przestrzeni. Jeśli X jest przestrzenią unitarną, to jedynym semi-iloczynem skalarnym jest oczywiście sam iloczyn skalarny.

- semi-ortogonalność

$$x \perp_s y \quad :\Leftrightarrow \quad [y|x] = 0.$$

Dla przestrzeni unitarnych mamy $\perp_B = \perp_s = \perp$ ($= \perp_i$ dla przestrzeni rzeczywistych).

Dla danej normy może istnieć wiele różnych semi-iloczynów skalarnych. Jedyność jest równoważna z gładkością przestrzeni. Jeśli X jest przestrzenią unitarną, to jedynym semi-iloczynem skalarnym jest oczywiście sam iloczyn skalarny.

- semi-ortogonalność

$$x \perp_s y \quad :\Leftrightarrow \quad [y|x] = 0.$$

Dla przestrzeni unitarnych mamy $\perp_B = \perp_s = \perp$ ($= \perp_i$ dla przestrzeni rzeczywistych).

Wiadomo też, że gdy przestrzeń X jest gładka, to $\perp_B = \perp_s$. Z kolei równość $\perp_i = \perp_B$ (a nawet każda z inkluzji $\perp_i \subset \perp_B$ i $\perp_i \supset \perp_B$) zachodzi tylko w przestrzeni unitarnej.



Inne możliwe do rozważania relacje ortogonalności to
ortogonalność Pitagorasa

$$x \perp_P y \quad :\Leftrightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

Inne możliwe do rozważania relacje ortogonalności to
ortogonalność Pitagorasa

$$x \perp_P y \quad :\Leftrightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

Robertsa

$$x \perp_R y \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|,$$

Inne możliwe do rozważania relacje ortogonalności to
ortogonalność Pitagorasa

$$x \perp_P y \quad :\Leftrightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

Robertsa

$$x \perp_R y \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|,$$

ϱ -ortogonalność

$$x \perp_{\varrho} y \quad :\Leftrightarrow \quad \varrho'_+(x, y) + \varrho'_-(x, y) = 0,$$

gdzie

$$\varrho'_\pm(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|x + ty\|^2 - \|x\|^2}{2t}, \quad x, y \in X, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Ortogonalność Jamesa

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla niezerowego operatora liniowego $f : X \rightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

- (a) $\forall x, y \in X \quad x \perp_i y \Rightarrow fx \perp_i fy;$
- (b) $\exists \gamma > 0 \forall x \in X \quad \|fx\| = \gamma \|x\|.$

Ortogonalność Jamesa

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla niezerowego operatora liniowego $f : X \rightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

- (a) $\forall x, y \in X \quad x \perp_i y \Rightarrow fx \perp_i fy;$
- (b) $\exists \gamma > 0 \forall x \in X \quad \|fx\| = \gamma \|x\|.$

Dowód: Dla dowodu implikacji (a) $\Rightarrow$ (b) zauważmy, że (a) jest równoważne z warunkiem $\forall x, y \in X, \|x\| = \|y\| \Rightarrow \|fx\| = \|fy\|$. Niech $\gamma := \|f(u)\|$ dla dowolnego wektora $\|u\| = 1$. Wówczas dla dowolnego $x \neq 0$ mamy $\|f(x)\| = \|f(\frac{x}{\|x\|})\| \|x\| = \gamma \|x\|$. Przypadek $x = 0$ jest trywialny.



Ortogonalność Jamesa

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla niezerowego operatora liniowego $f : X \rightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

- (a) $\forall x, y \in X \quad x \perp_i y \Rightarrow fx \perp_i fy;$
- (b) $\exists \gamma > 0 \forall x \in X \quad \|fx\| = \gamma \|x\|.$

Dowód: Dla dowodu implikacji (a) $\Rightarrow$ (b) zauważmy, że (a) jest równoważne z warunkiem $\forall x, y \in X, \|x\| = \|y\| \Rightarrow \|fx\| = \|fy\|$. Niech $\gamma := \|f(u)\|$ dla dowolnego wektora $\|u\| = 1$. Wówczas dla dowolnego $x \neq 0$ mamy $\|f(x)\| = \|f(\frac{x}{\|x\|})\| \|x\| = \gamma \|x\|$. Przypadek $x = 0$ jest trywialny. Implikacja (b) $\Rightarrow$ (a) jest oczywista.



Semi-ortogonalność

- D. Koehler, P. Rosenthal, *On isometries of normed linear spaces*, *Studia Math.* **36** (1970), 213-216.

Operator liniowy $f: X \rightarrow X$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje pewien semi-iloczyn skalarny.



Semi-ortogonalność

- D. Koehler, P. Rosenthal, *On isometries of normed linear spaces*, Studia Math. **36** (1970), 213-216.

Operator liniowy $f: X \rightarrow X$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje pewien semi-iloczyn skalarny.

Twierdzenie

Niech X, Y – przestrzenie unormowane, $f: X \rightarrow Y$ – operator liniowy. Wówczas dla pewnego $\gamma > 0$

$$\|fx\| = \gamma\|x\|, \quad x \in X,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją semi-iloczyny skalarne $[\cdot|\cdot]_X$ i $[\cdot|\cdot]_Y$ odpowiednio w X i Y (ten sam, gdy $X = Y$) takie, że

$$[fx|fy]_Y = \gamma^2 [x|y]_X, \quad x, y \in X. \quad (2)$$

Dowód: Załóżmy, że X i Y są różnymi przestrzeniami unormowanymi.



Dowód: Załóżmy, że X i Y są różnymi przestrzeniami unormowanymi. Ustalmy dowolny semi-iloczyn skalarny $[\cdot|\cdot]_Y$ w Y .



Dowód: Załóżmy, że X i Y są różnymi przestrzeniami unormowanymi. Ustalmy dowolny semi-iloczyn skalarny $[\cdot|\cdot]_Y$ w Y . Wówczas

$$[x|y]_X := \frac{1}{\gamma^2} [fx|fy]_Y, \quad x, y \in X$$

jest semi-iloczynem skalarnym w X i takim, że (2) zachodzi.



Dowód: Załóżmy, że X i Y są różnymi przestrzeniami unormowanymi. Ustalmy dowolny semi-iloczyn skalarny $[\cdot|\cdot]_Y$ w Y . Wówczas

$$[x|y]_X := \frac{1}{\gamma^2} [fx|fy]_Y, \quad x, y \in X$$

jest semi-iloczynem skalarnym w X i takim, że (2) zachodzi. Gdy $X = Y$ i normy są te same równość $[\cdot|\cdot]_X = [\cdot|\cdot]_Y$ może nie zachodzić (chyba, że X jest gładka). W tym przypadku stosujemy dowód Koehlera i Rosenthala (z pewnymi modyfikacjami dotyczącymi γ).



Dowód: Załóżmy, że X i Y są różnymi przestrzeniami unormowanymi. Ustalmy dowolny semi-iloczyn skalarny $[\cdot|\cdot]_Y$ w Y . Wówczas

$$[x|y]_X := \frac{1}{\gamma^2} [fx|fy]_Y, \quad x, y \in X$$

jest semi-iloczynem skalarnym w X i takim, że (2) zachodzi. Gdy $X = Y$ i normy są te same równość $[\cdot|\cdot]_X = [\cdot|\cdot]_Y$ może nie zachodzić (chyba, że X jest gładka). W tym przypadku stosujemy dowód Koehlera i Rosenthala (z pewnymi modyfikacjami dotyczącymi γ). Dowód w drugą stronę jest trywialny. $\square$



Ortogonalność Birkhoffa

- A. Koldobsky, *Operators preserving orthogonality are isometries*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **123** (1993), 835-837.
- A. Blanco, A. Turnšek, *On maps that preserve orthogonality in normed spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **136** (2006), 709-716.



Ortogonalność Birkhoffa

- A. Koldobsky, *Operators preserving orthogonality are isometries*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **123** (1993), 835-837.
- A. Blanco, A. Turnšek, *On maps that preserve orthogonality in normed spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **136** (2006), 709-716.

Twierdzenie

Niech X i Y będą (rzeczywistymi lub zespolonymi) przestrzeniami unormowanymi, i niech $f : X \rightarrow Y$ będzie operatorem liniowym. Wówczas

$$x \perp_B y \Rightarrow fx \perp_B fy, \quad x, y \in X, \quad (3)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $\gamma > 0$, $\|fx\| = \gamma\|x\|$, $x \in X$.

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi i niech $f : X \rightarrow Y$ będzie linowym odwzorowaniem takim, że dla pewnych semi-iloczynów skalarnych $[\cdot|\cdot]_X$ i $[\cdot|\cdot]_Y$ odpowiednio w X i Y ,

$$x \perp_s y \Rightarrow fx \perp_s fy, \quad x, y \in X. \quad (4)$$

Wówczas, dla pewnego $\gamma > 0$, $\|fx\| = \gamma\|x\|$, $x \in X$.

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi i niech $f : X \rightarrow Y$ będzie linowym odwzorowaniem takim, że dla pewnych semi-iloczynów skalarnych $[\cdot|\cdot]_X$ i $[\cdot|\cdot]_Y$ odpowiednio w X i Y ,

$$x \perp_s y \Rightarrow fx \perp_s fy, \quad x, y \in X. \quad (4)$$

Wówczas, dla pewnego $\gamma > 0$, $\|fx\| = \gamma\|x\|$, $x \in X$.

Odwrotna implikacja wynika z wcześniejszego twierdzenia.

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla operatora liniowego $f : X \rightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla operatora liniowego $f : X \rightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

(a) $\exists \gamma > 0 \forall x \in X \quad \|fx\| = \gamma \|x\|;$

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla operatora liniowego $f : X \rightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

- (a) $\exists \gamma > 0 \forall x \in X \quad \|fx\| = \gamma \|x\|;$
- (b) $\exists \gamma > 0 \forall x, y \in X \quad [fx|fy]_Y = \gamma [x|y]_X;$

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla operatora liniowego $f : X \rightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

- (a) $\exists \gamma > 0 \forall x \in X \quad \|fx\| = \gamma \|x\|;$
- (b) $\exists \gamma > 0 \forall x, y \in X \quad [fx|fy]_Y = \gamma [x|y]_X;$
- (c) $\forall x, y \in X \quad x \perp_s y \Rightarrow fx \perp_s fy;$

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla operatora liniowego $f : X \rightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

- (a) $\exists \gamma > 0 \forall x \in X \quad \|fx\| = \gamma \|x\|;$
- (b) $\exists \gamma > 0 \forall x, y \in X \quad [fx|fy]_Y = \gamma [x|y]_X;$
- (c) $\forall x, y \in X \quad x \perp_s y \Rightarrow fx \perp_s fy;$
- (d) $\forall x, y \in X \quad x \perp_B y \Rightarrow fx \perp_B fy;$

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla operatora liniowego $f : X \rightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

- (a) $\exists \gamma > 0 \forall x \in X \quad \|fx\| = \gamma \|x\|;$
- (b) $\exists \gamma > 0 \forall x, y \in X \quad [fx|fy]_Y = \gamma [x|y]_X;$
- (c) $\forall x, y \in X \quad x \perp_s y \Rightarrow fx \perp_s fy;$
- (d) $\forall x, y \in X \quad x \perp_B y \Rightarrow fx \perp_B fy;$
- (e) $\forall x, y \in X \quad x \perp_i y \Rightarrow fx \perp_i fy.$

Twierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Dla operatora liniowego $f : X \rightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

- (a) $\exists \gamma > 0 \forall x \in X \quad \|fx\| = \gamma \|x\|;$
- (b) $\exists \gamma > 0 \forall x, y \in X \quad [fx|fy]_Y = \gamma [x|y]_X;$
- (c) $\forall x, y \in X \quad x \perp_s y \Rightarrow fx \perp_s fy;$
- (d) $\forall x, y \in X \quad x \perp_B y \Rightarrow fx \perp_B fy;$
- (e) $\forall x, y \in X \quad x \perp_i y \Rightarrow fx \perp_i fy.$

Warunki (b) i (c) należy rozumieć w ten sposób, że zachodzą one z pewnymi semi-iloczynami skalarnymi $[\cdot|\cdot]_X$ i $[\cdot|\cdot]_Y$ odpowiednio w X i Y (a jeśli $X = Y$, to z pewnym jednym semi-iloczynem skalarnym w tej przestrzeni).



Uwaga

Zauważmy, że w szczególności, własności zachowywania przez odwzorowanie liniowe ortogonalności Birkhoffa-Jamesa, Jamesa i semi-ortogonalności są równoważne, chociaż same relacje $\perp_B$, $\perp_s$ i $\perp_i$ nie są generalnie równoważne.

Uwaga

Zauważmy, że w szczególności, własności zachowywania przez odwzorowanie liniowe ortogonalności Birkhoffa-Jamesa, Jamesa i semi-ortogonalności są równoważne, chociaż same relacje $\perp_B$, $\perp_s$ i $\perp_i$ nie są generalnie równoważne.

Uwaga

Są jednak takie relacje ortogonalności i takie operatory liniowe, które je zachowują, ale nie są podobieństwami.

Uwaga

Zauważmy, że w szczególności, własności zachowywania przez odwzorowanie liniowe ortogonalności Birkhoffa-Jamesa, Jamesa i semi-ortogonalności są równoważne, chociaż same relacje $\perp_B$, $\perp_s$ i $\perp_i$ nie są generalnie równoważne.

Uwaga

Są jednak takie relacje ortogonalności i takie operatory liniowe, które je zachowują, ale nie są podobieństwami. Np. ortogonalność Singera:

$$x \perp_{sy} y \Leftrightarrow \|x\| \|y\| = 0 \text{ lub } \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

Przybliżone zachowywanie ortogonalności i stabilność



Przybliżone zachowywanie ortogonalności i stabilność

- J. Chmieliński, *Linear mappings approximately preserving orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. **304** (2005), 158–169.



Przybliżone zachowywanie ortogonalności i stabilność

- J. Chmieliński, *Linear mappings approximately preserving orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. **304** (2005), 158–169.

Dla $\varepsilon \in [0, 1)$ definiujemy *przybliżoną ortogonalność* (ε -ortogonalność) wektorów u i v :

$$u \perp^\varepsilon v \Leftrightarrow |\langle u | v \rangle| \leq \varepsilon \|u\| \|v\|$$

(norma po prawej stronie pochodzi od iloczynu skalarnego).



Przybliżone zachowywanie ortogonalności i stabilność

- J. Chmieliński, *Linear mappings approximately preserving orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. **304** (2005), 158–169.

Dla $\varepsilon \in [0, 1)$ definiujemy *przybliżoną ortogonalność* (ε -ortogonalność) wektorów u i v :

$$u \perp^\varepsilon v \Leftrightarrow |\langle u | v \rangle| \leq \varepsilon \|u\| \|v\|$$

(norma po prawej stronie pochodzi od iloczynu skalarnego).
Powiemy, że $f: X \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem w *przybliżeniu zachowującym ortogonalność* jeśli spełnia ono warunek:

$$\forall x, y \in X: x \perp y \Rightarrow f(x) \perp^\varepsilon f(y) \quad (5)$$

z pewnym $\varepsilon \in [0, 1)$.



Przykład

Dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 1)$, funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dana wzorem

$$f(x_1, x_2) := (\sqrt{1 - \varepsilon} x_1, x_2)$$

jest liniowym rozwiązaniem (5), a nie jest odwzorowaniem (dokładnie) zachowującym ortogonalność.

Twierdzenie

Niech $0 \neq f: X \rightarrow Y$ będzie liniowym odwzorowaniem spełniającym (5).

Twierdzenie

Niech $0 \neq f: X \rightarrow Y$ będzie liniowym odwzorowaniem spełniającym (5). Wówczas f jest iniektywne i ciągłe oraz, z pewną stałą $\gamma > 0$, spełnia nierówność:

$$|\langle f(x)|f(y) \rangle - \gamma \langle x|y \rangle| \leq \hat{\varepsilon} \cdot \min\{\gamma \|x\| \|y\|, \|f(x)\| \|f(y)\|\}, \quad x, y \in X \quad (6)$$

gdzie $\hat{\varepsilon} = \frac{4\varepsilon}{1 + \varepsilon}$.

Twierdzenie

Niech $0 \neq f: X \rightarrow Y$ będzie liniowym odwzorowaniem spełniającym (5). Wówczas f jest iniektywne i ciągłe oraz, z pewną stałą $\gamma > 0$, spełnia nierówność:

$$|\langle f(x)|f(y) \rangle - \gamma \langle x|y \rangle| \leq \hat{\varepsilon} \cdot \min\{\gamma \|x\| \|y\|, \|f(x)\| \|f(y)\|\}, \quad x, y \in X \quad (6)$$

gdzie $\hat{\varepsilon} = \frac{4\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Na odwrót, jeśli $f: X \rightarrow Y$ spełnia (6), to

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma}(\|x\| + \|y\|), \quad x, y \in X; \quad (7)$$

$$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\| \leq 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma}|\lambda| \|x\|, \quad x \in X, \lambda \in \mathbb{K} \quad (8)$$

oraz

$$x \perp y \Rightarrow f(x) \perp^{\varepsilon} f(y) \quad i \quad f(x) \perp f(y) \Rightarrow x \perp^{\varepsilon} y \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Twierdzenie

Niech X, Y będą przestrzeniami Hilberta i niech $f: X \rightarrow Y$ będzie liniowym odwzorowaniem zachowującym w ε -przybliżony sposób ortogonalność. Wówczas istnieje liniowe odwzorowanie zachowujące ortogonalność $T: X \rightarrow Y$ takie, że

$$\|f - T\| \leq \varepsilon \cdot \min\{\|f\|, \|T\|\}. \quad (9)$$

Twierdzenie

Niech X, Y będą przestrzeniami Hilberta i niech $f: X \rightarrow Y$ będzie liniowym odwzorowaniem zachowującym w ε -przybliżony sposób ortogonalność. Wówczas istnieje liniowe odwzorowanie zachowujące ortogonalność $T: X \rightarrow Y$ takie, że

$$\|f - T\| \leq \varepsilon \cdot \min\{\|f\|, \|T\|\}. \quad (9)$$

- J. Chmieliński, *Stability of the orthogonality preserving property in finite-dimensional inner product spaces*, J. Math. Anal. Appl. **318** (2006), 433-443.
- A. Turnšek, *On mappings approximately preserving orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 625-631.



Uogólnienie – moduły Hilberta

- D. Ilišević, A. Turnšek, *Approximately orthogonality preserving mappings on C^* -modules*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 298–308.



Uogólnienie – moduły Hilberta

- D. Ilišević, A. Turnšek, *Approximately orthogonality preserving mappings on C^* -modules*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 298–308.

Odwzorowania liniowe zachowujące ortogonalność w C^* -modułach.
Analogiczne wyniki opisujące takie odwzorowania.



Uogólnienie – moduły Hilberta

- D. Ilišević, A. Turnšek, *Approximately orthogonality preserving mappings on C^* -modules*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 298–308.

Odwzorowania liniowe zachowujące ortogonalność w C^* -modułach.
Analogiczne wyniki opisujące takie odwzorowania.

Stabilność jak dla przestrzeni unitarnych przy pewnych dodatkowych założeniach (dla pewnych szczególnych algebr C^* , nad którymi rozważane są moduły).



Przybliżona ortogonalność w przestrzeniach unormowanych — ortogonalność Jamesa

- J. Chmieliński, P. Wójcik *Isosceles-orthogonality preserving property and its stability*, Nonlinear Anal. **72** (2010), 1445-1453.



Przybliżona ortogonalność w przestrzeniach unormowanych — ortogonalność Jamesa

- J. Chmieliński, P. Wójcik *Isosceles-orthogonality preserving property and its stability*, Nonlinear Anal. **72** (2010), 1445-1453.

Założmy, że X jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną.



Przybliżona ortogonalność w przestrzeniach unormowanych — ortogonalność Jamesa

- J. Chmieliński, P. Wójcik *Isosceles-orthogonality preserving property and its stability*, Nonlinear Anal. **72** (2010), 1445-1453.

Założmy, że X jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną.
Niech $\varepsilon \in [0, 1)$, $x, y \in X$; definiujemy:



Przybliżona ortogonalność w przestrzeniach unormowanych — ortogonalność Jamesa

- J. Chmieliński, P. Wójcik *Isosceles-orthogonality preserving property and its stability*, Nonlinear Anal. **72** (2010), 1445-1453.

Założmy, że X jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną.

Niech $\varepsilon \in [0, 1)$, $x, y \in X$; definiujemy:

$$\begin{aligned} x^{\varepsilon} \perp_i y &\iff \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \|x - y\| \leq \|x + y\| \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \|x - y\| \\ &\iff |\|x + y\| - \|x - y\|| \leq \varepsilon (\|x + y\| + \|x - y\|) \end{aligned}$$

Przybliżona ortogonalność w przestrzeniach unormowanych — ortogonalność Jamesa

- J. Chmieliński, P. Wójcik *Isosceles-orthogonality preserving property and its stability*, Nonlinear Anal. **72** (2010), 1445-1453.

Założmy, że X jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną.
Niech $\varepsilon \in [0, 1)$, $x, y \in X$; definiujemy:

$$\begin{aligned} x^{\varepsilon} \perp_i y &\iff \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \|x-y\| \leq \|x+y\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \|x-y\| \\ &\iff \left| \|x+y\| - \|x-y\| \right| \leq \varepsilon (\|x+y\| + \|x-y\|) \end{aligned}$$

oraz

$$x^{\varepsilon} \perp_i y \iff \left| \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right| \leq 4\varepsilon \|x\| \|y\|.$$



Przybliżona ortogonalność w przestrzeniach unormowanych — ortogonalność Jamesa

- J. Chmieliński, P. Wójcik *Isosceles-orthogonality preserving property and its stability*, Nonlinear Anal. **72** (2010), 1445-1453.

Założmy, że X jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną.
Niech $\varepsilon \in [0, 1)$, $x, y \in X$; definiujemy:

$$\begin{aligned} x^{\varepsilon} \perp_i y &\iff \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \|x-y\| \leq \|x+y\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \|x-y\| \\ &\iff \left| \|x+y\| - \|x-y\| \right| \leq \varepsilon (\|x+y\| + \|x-y\|) \end{aligned}$$

oraz

$$x^{\varepsilon} \perp_i y \iff \left| \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right| \leq 4\varepsilon \|x\| \|y\|.$$

Dla $\varepsilon = 0$ w obu przypadkach dostajemy i -ortogonalność.



Łatwo pokazać, że pierwsza definicja jest słabsza niż druga, tzn.
 dla dowolnego $\varepsilon \in [0, 1)$

$$x \perp_i^\varepsilon y \implies x^\varepsilon \perp_i y, \quad x, y \in X,$$

ale nie na odwrót.

Łatwo pokazać, że pierwsza definicja jest słabsza niż druga, tzn. dla dowolnego $\varepsilon \in [0, 1]$

$$x \perp_i^\varepsilon y \implies x^\varepsilon \perp_i y, \quad x, y \in X,$$

ale nie na odwrót.

Jeśli norma pochodzi od iloczynu skalarnego, mamy

$$x^\varepsilon \perp_i y \iff |\langle x|y \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

oraz

$$x \perp_i^\varepsilon y \iff |\langle x|y \rangle| \leq \varepsilon \|x\| \|y\| \iff x \perp^\varepsilon y$$

Przykład

Niech X — przestrzeń unitarna, $x \in X \setminus \{0\}$ i $y = \lambda x$ dla $\lambda > 0$.
Wówczas

$$\frac{|\langle x|y \rangle|}{\|x\|^2 + \|y\|^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \rightarrow 0 \text{ (przy } \lambda \rightarrow \infty)$$

oraz

$$\frac{|\langle x|y \rangle|}{\|x\| \|y\|} = 1 \text{ dla dowolnego } \lambda.$$

Zatem dla dowolnych $x \neq 0$ i $\varepsilon \in [0, 1)$ istnieje λ takie, że $x^\varepsilon \perp_\lambda x$ podczas gdy $x^\varepsilon \perp_\lambda x$ nie zachodzi dla żadnego $\varepsilon \in [0, 1)$.

Odwzorowania zachowujące w przybliżeniu ortogonalność Jamesa

$$x \perp_i y \implies f(x)^\varepsilon \perp_i f(y), \quad x, y \in X \quad (10)$$



Odwzorowania zachowujące w przybliżeniu ortogonalność Jamesa

$$x \perp_i y \implies f(x) \varepsilon \perp_i f(y), \quad x, y \in X \quad (10)$$

Niech $f: X \rightarrow Y$ będzie liniowe i ciągłe. Definiujemy:

$$\|f\| = \sup\{\|fx\| : \|x\| = 1\} = \inf\{M > 0 : \|fx\| \leq M\|x\|, x \in X\};$$

$$[f] := \inf\{\|fx\| : \|x\| = 1\} = \sup\{M \geq 0 : \|fx\| \geq M\|x\|, x \in X\}.$$



Twierdzenie

Niech $\varepsilon \in [0, 1)$, $f: X \rightarrow Y$ — niezerowe, liniowe. Wówczas następujące warunki są równoważne:

Twierdzenie

Niech $\varepsilon \in [0, 1)$, $f: X \rightarrow Y$ — niezerowe, liniowe. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $x \perp_i y \implies f(x)^\varepsilon \perp_i f(y), \quad x, y \in X;$

Twierdzenie

Niech $\varepsilon \in [0, 1)$, $f: X \rightarrow Y$ — niezerowe, liniowe. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $x \perp_i y \implies f(x)^\varepsilon \perp_i f(y), \quad x, y \in X;$
- $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \|f\| \|x\| \leq \|fx\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} [f] \|x\|, \quad x \in X;$

Twierdzenie

Niech $\varepsilon \in [0, 1)$, $f: X \rightarrow Y$ — niezerowe, liniowe. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $x \perp_i y \implies f(x)^\varepsilon \perp_i f(y), \quad x, y \in X;$
- $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \|f\| \|x\| \leq \|fx\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} [f] \|x\|, \quad x \in X;$
- $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \gamma \|x\| \leq \|fx\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \gamma \|x\|, \quad x \in X, \gamma \in [[f], \|f\|];$

Twierdzenie

Niech $\varepsilon \in [0, 1)$, $f: X \rightarrow Y$ — niezerowe, liniowe. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $x \perp_i y \implies f(x)^\varepsilon \perp_i f(y), \quad x, y \in X;$
- $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \|f\| \|x\| \leq \|fx\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} [f] \|x\|, \quad x \in X;$
- $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \gamma \|x\| \leq \|fx\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \gamma \|x\|, \quad x \in X, \gamma \in [[f], \|f\|];$
- $\|f\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} [f];$

Twierdzenie

Niech $\varepsilon \in [0, 1)$, $f: X \rightarrow Y$ — niezerowe, liniowe. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $x \perp_i y \implies f(x)^\varepsilon \perp_i f(y), \quad x, y \in X;$
- $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \|f\| \|x\| \leq \|fx\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} [f] \|x\|, \quad x \in X;$
- $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \gamma \|x\| \leq \|fx\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \gamma \|x\|, \quad x \in X, \gamma \in [[f], \|f\|];$
- $\|f\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} [f];$
- $\|fx\| \|y\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \|fy\| \|x\|, \quad x, y \in X.$

Stabilność izometrii



Stabilność izometrii

Przez ε -izometrię ($\varepsilon \in [0, 1)$) rozumiemy tu odwzorowanie liniowe $f: X \rightarrow Y$ spełniające

$$| \|fx\| - \|x\| | \leq \varepsilon \|x\|, \quad x \in X.$$



Stabilność izometrii

Przez ε -izometrię ($\varepsilon \in [0, 1)$) rozumiemy tu odwzorowanie liniowe $f: X \rightarrow Y$ spełniające

$$| \|fx\| - \|x\| | \leq \varepsilon \|x\|, \quad x \in X.$$

Stawiamy następujący problem: Czy dla danej pary przestrzeni unormowanych (X, Y) istnieje odwzorowanie $\delta: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełniające warunek $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ i takie, że dla każdej liniowej ε -izometrii $f: X \rightarrow Y$ (z $0 \leq \varepsilon < 1$) istnieje liniowa izometria $I: X \rightarrow Y$ taka, że

$$\|f - I\| \leq \delta(\varepsilon)?$$



Stabilność izometrii

Przez ε -izometrię ($\varepsilon \in [0, 1)$) rozumiemy tu odwzorowanie liniowe $f: X \rightarrow Y$ spełniające

$$| \|fx\| - \|x\| | \leq \varepsilon \|x\|, \quad x \in X.$$

Stawiamy następujący problem: Czy dla danej pary przestrzeni unormowanych (X, Y) istnieje odwzorowanie $\delta: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełniające warunek $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ i takie, że dla każdej liniowej ε -izometrii $f: X \rightarrow Y$ (z $0 \leq \varepsilon < 1$) istnieje liniowa izometria $I: X \rightarrow Y$ taka, że

$$\|f - I\| \leq \delta(\varepsilon)?$$

Przez $\mathfrak{A}$ oznaczamy klasę wszystkich par przestrzeni unormowanych, dla których powyższy problem ma pozytywne rozwiązanie.



Możemy też rozważać szerszą klasę $\mathfrak{B}$ wszystkich par przestrzeni unormowanych (X, Y) , dla których zachodzi następująca własność: Dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdej liniowej ε -izometrii $f: X \rightarrow Y$ istnieje liniowa izometria $I: X \rightarrow Y$ taka, że

$$\|f - I\| \leq \delta.$$

Możemy też rozważać szerszą klasę $\mathfrak{B}$ wszystkich par przestrzeni unormowanych (X, Y) , dla których zachodzi następująca własność: Dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdej liniowej ε -izometrii $f: X \rightarrow Y$ istnieje liniowa izometria $I: X \rightarrow Y$ taka, że

$$\|f - I\| \leq \delta.$$

Oczywiście $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Równości generalnie nie ma. Ale gdy $X = Y$ mamy $(X, X) \in \mathfrak{A} \iff (X, X) \in \mathfrak{B}$.

Jeśli wymiar X jest większy niż wymiar Y , to para (X, Y) należy do klasy $\mathfrak{A}$ gdyż nie ma wówczas liniowych ε -izometrii. Ponadto, każda para (X, Y) skończenie wymiarowych przestrzeni unormowanych należy do $\mathfrak{B}$ (zwartość kul).

Jeśli wymiar X jest większy niż wymiar Y , to para (X, Y) należy do klasy $\mathfrak{A}$ gdyż nie ma wówczas liniowych ε -izometrii. Ponadto, każda para (X, Y) skończenie wymiarowych przestrzeni unormowanych należy do $\mathfrak{B}$ (zwartość kul).

Przykład

Rozważmy $\mathbb{R}^2$ z normami $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$:

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|, \quad \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Jeśli wymiar X jest większy niż wymiar Y , to para (X, Y) należy do klasy $\mathfrak{A}$ gdyż nie ma wówczas liniowych ε -izometrii. Ponadto, każda para (X, Y) skończenie wymiarowych przestrzeni unormowanych należy do $\mathfrak{B}$ (zwartość kul).

Przykład

Rozważmy $\mathbb{R}^2$ z normami $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$:

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|, \quad \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Wówczas dla $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $Y = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ oraz $f = \text{id}$ mamy $\frac{\sqrt{2}}{2}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ dla $x \in \mathbb{R}^2$ a zatem, z $\varepsilon := 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$(1 - \varepsilon)\|x\|_1 \leq \|fx\|_2 \leq (1 + \varepsilon)\|x\|_1, \quad x \in X.$$

Jeśli wymiar X jest większy niż wymiar Y , to para (X, Y) należy do klasy $\mathfrak{A}$ gdyż nie ma wówczas liniowych ε -izometrii. Ponadto, każda para (X, Y) skończenie wymiarowych przestrzeni unormowanych należy do $\mathfrak{B}$ (zwartość kul).

Przykład

Rozważmy $\mathbb{R}^2$ z normami $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$:

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|, \quad \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Wówczas dla $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $Y = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ oraz $f = \text{id}$ mamy $\frac{\sqrt{2}}{2}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ dla $x \in \mathbb{R}^2$ a zatem, z $\varepsilon := 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$(1 - \varepsilon)\|x\|_1 \leq \|fx\|_2 \leq (1 + \varepsilon)\|x\|_1, \quad x \in X.$$

Istnieje więc liniowa ε -izometria $f : X \rightarrow Y$ której nie można aproksymować izometrią gdyż nie ma takiej pomiędzy X i Y .

Udowodniono, że dla przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ para $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ należy do $\mathfrak{A}$ z $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Wykazano również, że $(m, m), (c, c), (c_0, c_0) \in \mathfrak{A}$. Jednak generalnie, para przestrzeni unormowanych (X, Y) nie musi należeć do $\mathfrak{B}$; ani gdy X i Y są różnymi przestrzeniami, ani (co jest trudniejsze do wykazania) w przypadku $X = Y$.

Stabilność odwzorowań zachowujących ortogonalność w sensie Jamesa

Stwierdzenie

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi i niech $g : X \rightarrow Y$ będzie liniowym odwzorowaniem zachowującym i -ortogonalność. Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie liniowe i takie, że (z pewnym $\varepsilon \in [0, 1)$) zachodzi

$$\|f - g\| \leq \varepsilon \|g\|. \quad (11)$$

Wówczas f spełnia (10).

Twierdzenie

X, Y – przestrzenie unormowane takie, że $(X, Y) \in \mathfrak{A}$ (z odpowiednio określonym odwzorowaniem δ).

Twierdzenie

X, Y – przestrzenie unormowane takie, że $(X, Y) \in \mathfrak{A}$ (z odpowiednio określonym odwzorowaniem δ). Niech $\varepsilon \in [0, 1)$ i $f: X \rightarrow Y$ — liniowe odwzorowanie spełniające (10).

Twierdzenie

X, Y – przestrzenie unormowane takie, że $(X, Y) \in \mathfrak{A}$ (z odpowiednio określonym odwzorowaniem δ). Niech $\varepsilon \in [0, 1)$ i $f: X \rightarrow Y$ — liniowe odwzorowanie spełniające (10). Wówczas istnieje odwzorowanie liniowe $g: X \rightarrow Y$ zachowujące i -ortogonalność takie, że

$$\|f - g\| \leq \delta(\varepsilon) \cdot \min\{\|f\|, \|g\|\}.$$

Twierdzenie

X, Y – przestrzenie unormowane takie, że $(X, Y) \in \mathfrak{A}$ (z odpowiednio określonym odwzorowaniem δ). Niech $\varepsilon \in [0, 1]$ i $f: X \rightarrow Y$ — liniowe odwzorowanie spełniające (10). Wówczas istnieje odwzorowanie liniowe $g: X \rightarrow Y$ zachowujące i -ortogonalność takie, że

$$\|f - g\| \leq \delta(\varepsilon) \cdot \min\{\|f\|, \|g\|\}.$$

Twierdzenie

X, Y – przestrzenie unormowane takie, że $(X, Y) \in \mathfrak{B}$. Wówczas dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla dowolnego odwzorowania liniowego $f: X \rightarrow Y$ spełniającego (10) istnieje liniowe odwzorowanie $g: X \rightarrow Y$ zachowujące i -ortogonalność i takie, że

$$\|f - g\| \leq \delta \cdot \min\{\|f\|, \|g\|\}.$$

Twierdzenie

Jeśli dla pewnej pary rzeczywistych przestrzeni unormowanych (X, Y) można wykazać stabilność własności zachowywania i -ortogonalności w sensie jednego z dwóch powyższych twierdzeń, to – odpowiednio – $(X, Y) \in \mathfrak{A}$ lub $(X, Y) \in \mathfrak{B}$.

Przykład (V. Protasov)



Przykład (V. Protasov)

Niech $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ będzie rosnącym ciągiem liczb dodatnich takich, że $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_k^2) < 1$ (stąd $\alpha_k \nearrow 1$).

Przykład (V. Protasov)

Niech $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ będzie rosnącym ciągiem liczb dodatnich takich, że $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_k^2) < 1$ (stąd $\alpha_k \nearrow 1$). W przestrzeni Hilberta l^2 wprowadźmy równoważną normę

$$\|x\|_{\alpha} := \sup \left\{ \|x\|_{l^2}, \left| \frac{x_1}{\alpha_1} \right|, \left| \frac{x_2}{\alpha_2} \right|, \dots \right\}$$

i oznaczmy symbolem H_{α} przestrzeń l^2 z normą $\|\cdot\|_{\alpha}$.

Przykład (V. Protasov)

Niech $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ będzie rosnącym ciągiem liczb dodatnich takich, że $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_k^2) < 1$ (stąd $\alpha_k \nearrow 1$). W przestrzeni Hilberta l^2 wprowadźmy równoważną normę

$$\|x\|_{\alpha} := \sup \left\{ \|x\|_{l^2}, \left| \frac{x_1}{\alpha_1} \right|, \left| \frac{x_2}{\alpha_2} \right|, \dots \right\}$$

i oznaczmy symbolem H_{α} przestrzeń l^2 z normą $\|\cdot\|_{\alpha}$. Dla $k \in \mathbb{N}$, definiujemy operator liniowy A_k zadając go na bazie:

$$A_k(e_k) = e_{k+1}, \quad A_k(e_{k+1}) = e_k \quad \text{i} \quad A_k(e_j) = e_j, \quad \text{dla } j \in \mathbb{N} \setminus \{k, k+1\}.$$



Niech $\delta_k := \frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_{k+1}}$ ($\delta_k \searrow 0$ przy $k \rightarrow \infty$). Można pokazać, że

$$| \|A_k x\|_\alpha - \|x\|_\alpha | \leq \delta_k \|x\|_\alpha, \quad x \in H_\alpha. \quad (12)$$



Niech $\delta_k := \frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_{k+1}}$ ($\delta_k \searrow 0$ przy $k \rightarrow \infty$). Można pokazać, że

$$| \|A_k x\|_\alpha - \|x\|_\alpha | \leq \delta_k \|x\|_\alpha, \quad x \in H_\alpha. \quad (12)$$

a stąd, że A_k spełnia (10) z $\varepsilon = \varepsilon_k := \frac{\delta_k}{1-\delta_k}$ (a więc $\varepsilon_k \searrow 0$ gdy $k \rightarrow \infty$).



Niech $\delta_k := \frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_{k+1}}$ ($\delta_k \searrow 0$ przy $k \rightarrow \infty$). Można pokazać, że

$$| \|A_k x\|_\alpha - \|x\|_\alpha | \leq \delta_k \|x\|_\alpha, \quad x \in H_\alpha. \quad (12)$$

a stąd, że A_k spełnia (10) z $\varepsilon = \varepsilon_k := \frac{\delta_k}{1-\delta_k}$ (a więc $\varepsilon_k \searrow 0$ gdy $k \rightarrow \infty$).

Ustalmy $0 < \delta < 1$ i założmy, że teza twierdzenia 12 jest prawdziwa dla H_α . Wówczas dla odpowiednio dużego k (tak, aby ε_k było odpowiednio małe) powinna istnieć liniowa izometria $I_k: H_\alpha \rightarrow H_\alpha$ i stała $\gamma_k > 0$ takie, że:

$$\|A_k - \gamma_k I_k\|_\alpha \leq \delta \|\gamma_k I_k\|_\alpha = \delta \gamma_k. \quad (13)$$



Można pokazać, że każda liniowa izometria $I: H_\alpha \rightarrow H_\alpha$ musi być postacią $I(e_i) = \pm e_i$, $i \in \mathbb{N}$. A zatem dla dowolnego $\gamma > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \|A_k - \gamma I\|_\alpha &\geq \alpha_{k+1} \|(A_k - \gamma I)e_{k+1}\|_\alpha = \alpha_{k+1} \|e_k \pm \gamma e_{k+1}\|_\alpha \\ &= \alpha_{k+1} \sup\{\|e_k \pm \gamma e_{k+1}\|_2, 0, \dots, 0, \frac{1}{\alpha_k}, \frac{\gamma}{\alpha_{k+1}}, 0, \dots\} \\ &= \max\{\alpha_{k+1} \sqrt{1 + \gamma^2}, \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}, \gamma\} \geq \gamma. \end{aligned}$$

Można pokazać, że każda liniowa izometria $I: H_\alpha \rightarrow H_\alpha$ musi być postacią $I(e_i) = \pm e_i$, $i \in \mathbb{N}$. A zatem dla dowolnego $\gamma > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \|A_k - \gamma I\|_\alpha &\geq \alpha_{k+1} \|(A_k - \gamma I)e_{k+1}\|_\alpha = \alpha_{k+1} \|e_k \pm \gamma e_{k+1}\|_\alpha \\ &= \alpha_{k+1} \sup\{\|e_k \pm \gamma e_{k+1}\|_2, 0, \dots, 0, \frac{1}{\alpha_k}, \frac{\gamma}{\alpha_{k+1}}, 0, \dots\} \\ &= \max\{\alpha_{k+1} \sqrt{1 + \gamma^2}, \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}, \gamma\} \geq \gamma. \end{aligned}$$

A więc $\|A_k - \gamma_k I_k\|_\alpha \geq \gamma_k$ co przeczy (13) (gdyż $\delta < 1$).

Inne ortogonalności

Niech $\varepsilon \in [0, 1)$.

Następująca definicja przybliżonej ortogonalności Birkhoffa–Jamesa wprowadzona została (dla przestrzeni unormowanych) przez S.S. Dragomira.

$$x \perp_{\varepsilon} y \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|x + \lambda y\| \geq (1 - \varepsilon)\|x\|. \quad (14)$$



Inne ortogonalności

Niech $\varepsilon \in [0, 1)$.

Następująca definicja przybliżonej ortogonalności Birkhoffa–Jamesa wprowadzona została (dla przestrzeni unormowanych) przez S.S. Dragomira.

$$x \perp_{\varepsilon} y \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|x + \lambda y\| \geq (1 - \varepsilon)\|x\|. \quad (14)$$

Dla przestrzeni unitarnych $x \perp_{\varepsilon} y \Leftrightarrow x \perp^{\delta} y$ gdzie $\delta := \sqrt{(2 - \varepsilon)\varepsilon}$.
Aby ta równoważność zachodziła z $\delta = \varepsilon$, można rozważyć następującą modyfikację wzoru (14):

$$x \perp_{\varepsilon}^D y \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|x + \lambda y\| \geq \sqrt{1 - \varepsilon^2}\|x\|. \quad (15)$$



Inne ortogonalności

Niech $\varepsilon \in [0, 1)$.

Następująca definicja przybliżonej ortogonalności Birkhoffa–Jamesa wprowadzona została (dla przestrzeni unormowanych) przez S.S. Dragomira.

$$x \perp_{\varepsilon} y \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|x + \lambda y\| \geq (1 - \varepsilon) \|x\|. \quad (14)$$

Dla przestrzeni unitarnych $x \perp_{\varepsilon} y \Leftrightarrow x \perp^{\delta} y$ gdzie $\delta := \sqrt{(2 - \varepsilon)\varepsilon}$.
Aby ta równoważność zachodziła z $\delta = \varepsilon$, można rozważyć następującą modyfikację wzoru (14):

$$x \perp_{\varepsilon}^D y \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|x + \lambda y\| \geq \sqrt{1 - \varepsilon^2} \|x\|. \quad (15)$$

Inną definicję przybliżonej ortogonalności Birkhoffa (na ogół nie równoważnej z (15)) podana została przez autora.

$$x \perp_{\varepsilon}^B y \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2 - 2\varepsilon \|x\| \|\lambda y\|. \quad (16)$$



Dla ustalonego semi-iloczynu skalarnego można zdefiniować *przybliżoną semi-ortogonalność* (ε -semi-orthogonalność):

$$x \perp_s^\varepsilon y \quad :\Leftrightarrow \quad |[y|x]| \leq \varepsilon \|x\| \cdot \|y\|, \quad (17)$$

Dla ustalonego semi-iloczynu skalarnego można zdefiniować *przybliżoną semi-ortogonalność* (ε -semi-orthogonalność):

$$x \perp_s^\varepsilon y \quad :\Leftrightarrow \quad |[y|x]| \leq \varepsilon \|x\| \cdot \|y\|, \quad (17)$$

Jeśli rozważana przestrzeń jest unitarna (norma pochodzi od iloczynu skalarnego) to $\perp_s^\varepsilon = \perp_B^\varepsilon = \perp_D^\varepsilon = \perp^\varepsilon$.

Dla ustalonego semi-iloczynu skalarnego można zdefiniować *przybliżoną semi-ortogonalność* (ε -semi-orthogonalność):

$$x \perp_s^\varepsilon y \quad :\Leftrightarrow \quad |[y|x]| \leq \varepsilon \|x\| \cdot \|y\|, \quad (17)$$

Jeśli rozważana przestrzeń jest unitarna (norma pochodzi od iloczynu skalarnego) to $\perp_s^\varepsilon = \perp_B^\varepsilon = \perp_D^\varepsilon = \perp^\varepsilon$.

Jeśli X jest przestrzenią unormowaną gładką, to $\perp_B^\varepsilon = \perp_s^\varepsilon$.



Zachowywanie ortogonalności i stabilność dla innych ortogonalności



Zachowywanie ortogonalności i stabilność dla innych ortogonalności

P. Wójcik: Dla ortogonalności Birkoffa, Pitagorasa, semi-ortogonalności, ρ -ortogonalności, ... można wykazać stabilność własności zachowywania ortogonalności przez odwzorowania liniowe w przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych.



Zachowywanie ortogonalności i stabilność dla innych ortogonalności

P. Wójcik: Dla ortogonalności Birkoffa, Pitagorasa, semi-ortogonalności, ρ -ortogonalności, ... można wykazać stabilność własności zachowywania ortogonalności przez odwzorowania liniowe w przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych. Na ogół, można też pokazać, że w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach tej stabilności może nie być.

Literatura



A. Blanco, A. Turnšek, *On maps that preserve orthogonality in normed spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **136** (2006), 709–716.



J. Chmieliński, *On an ε -Birkhoff orthogonality*, J. Inequal. Pure and Appl. Math., **6**(3) (2005), Art. 79.



J. Chmieliński, *Linear mappings approximately preserving orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. **304** (2005), 158–169.



J. Chmieliński, *Stability of the orthogonality preserving property in finite-dimensional inner product spaces*, J. Math. Anal. Appl. **318** (2006), 433–443.



J. Chmieliński, P. Wójcik *Isosceles-orthogonality preserving property and its stability*, Nonlinear Anal. **72** (2010), 1445–1453.



J.R. Giles, *Classes of semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967), 436–446.



D. Ilišević, A. Turnšek, *Approximately orthogonality preserving mappings on C^* -modules*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 298–308.



D. Koehler, P. Rosenthal, *On isometries of normed linear spaces*, Studia Math. **36** (1970), 213–216.



A. Koldobsky, *Operators preserving orthogonality are isometries*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **123** (1993), 835–837.



G. Lumer, *Semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29–43.



A. Turnšek, *On mappings approximately preserving orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 625–631.